**ЛЕКЦІЯ**

Повнота системи булевих функцій. Замкнені класи. Критерій функціональної повноти системи булевих функцій

**О.** *Система булевих функцій Q називається функціонально повною, якщо довільну булеву функцію можна записати у вигляді формули через функції системи Q.*

Дослідження повноти одних систем можна звести до дослідження повноти інших. Якщо всі функції функціонально повної системи *Q*1 можуть бути зображенні формулами над системою *Q*2, то *Q*2 – функціо­нально повна. Говорять, що система *Q*2 зводиться до системи *Q*1.

*Приклад*

Зведенням до повних систем показати, що система  = { є функціонально повна.

*Розв’язання*

Система  =  є функціонально повна. Це випливає із можливості зображення довільної булевої функції у ДНФ. Оскільки , то всі функції функціонально повної системи *Q*2 можуть бути зображені формулами над *Q*1.Тому система *Q*1 зводиться до системи *Q*2, а отже вона функціонально повна.

**О.** Множина *G* булевих функцій називається *замкненим класом*, якщо довільна суперпозиція функцій із *G* знову належить *G.*

Існує п’ять найважливіших замкнутих класів:

1. ***Клас Т0 функцій, що зберігають нуль.***

Булева функція *f*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) називається функцією, що зберігає нуль, якщо *f*(0, 0, ..., 0) = 0.

*Приклади*

*x**y, xy – зберігають 0.*

1. ***Клас Т*1 *функцій, що зберігають одиницю****.*

Булева функція *f*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) називається функцією, що зберігає одиницю, якщо *f*(1, 1, ..., 1) = 1.

*Приклади*

*x**y– не зберігає 1, xy – зберігає 1.*

1. ***Клас S самодвоїстих функцій.***

Функція *f*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) називається самодвоїстою, якщо вона двоїста сама до себе *f = f \*.*

*Приклади*

*x**y – не є самодвоїстою функцією, бо f*  *f \*.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | *y* | *f* | *f \** |
| *0* | *0* | *0* | *1* |
| *0* | *1* | *1* | *0* |
| *1* | *0* | *1* | *0* |
| *1* | *1* | *0* | *1* |

1. ***Клас M монотонних функцій.***

Для двох двійкових наборів  та  вико­нується відношення передування *α ≤ β*, якщо .

Булева функція називається монотонною, якщо для довільних двох наборів *α* та *β* з того, що *α ≤ β*, випливає, що .

*Приклади*

*x**y – не є монотонною функцією.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *y* | *x**y* |
| *0* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *1* |
| *1* | *0* | *1* |
| *1* | *1* | *0* |

*Оскільки (1,0) ≤(1,1), а* , то функція не є монотонною.

1. ***Клас L лінійних функцій.***

Булева функція *f*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) називається лінійною, якщо її поліном Жегалкіна має вигляд , де , тобто є поліномом першого степеня*.*

*Приклади*

 - не є лінійною.

***Теорема Поста (критерій функціональної повноти системи булевих функцій)****. Для того, щоб система булевих функцій була функціонально повною, необхідно й достатньо, щоб вона містила:*

1. *функцію, що не зберігає нуль;*
2. *функцію, що не зберігає одиницю;*
3. *несамодвоїсту функцію;*
4. *немонотонну функцію;*
5. *нелінійну функцію.*

Для перевірки виконання умов теореми Поста для деякої скінченної системи функцій  складають таблицю, яку називають *таблицею Поста* (табл. 1).

*Таблиця 1*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | + | - | - | + | + |
|  | - | + | + | + | + |
| … |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

У цій таблиці ставлять знак “−” або “+” залежно від того, належить чи не належить функція до відповідного класу. Для повноти системи необхідно й достатньо, щоб у кожному стовпчику таблиці Поста був принаймні один мінус (“−”).

Мінімальна повна система функцій, тобто така повна система функцій, вилучення з якої довільної функції робить систему неповною, називається *базисом.*

*Приклади*

Використовуючи критерій повноти, з’ясувати чи є функціо­наль­но повною система функцій *Q* =.

*Розв’язання*